Ueber

Kugel- und Cylinderfunktionen

und

deren Kettenbruchentwickelung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei der

hohen philosophischen Fakultät

der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn

eingereicht und mit den beigefügten Thesen vertheidigt

am 5. März 1894, Mittags 12 Uhr

von

Rudolf Banning
aus Minden.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Opponenten:

H. Füth, Dr. med.
A. Helle, Dr. phil.
Th. Nissen, cand. phil.

Bonn,
Universitäts-Buchdruckerei von Carl Georgi.
1894.

Gauss[1]) hat den Quotienten zweier hypergeometrischen Reihen $F(\alpha, \beta, \gamma, x) : F(\alpha+1, \beta, \gamma+1, x)$ in einen im allgemeinen unendlichen Kettenbruch verwandelt. Thomé[2]) und Riemann[3]) haben dann auf verschiedenem Wege gezeigt, dass diese Kettenbruchentwickelung gegen den Wert des Quotienten konvergiert für alle Werte der komplexen Variabeln x mit Ausnahme der reellen Werte zwischen den Grenzen $+1$ und $+\infty$.

Nun kann man zwar die Kugelfunktionen und einen besonderen Grenzfall derselben, die Cylinderfunktionen, als hypergeometrische Reihen auffassen. Jedoch ist die Frage nach der Konvergenz des Kettenbruches, in welchen man den Quotienten zweier Kugelfunktionen $P_n : P_{n+1}$ verwandeln kann, durch die genannten Untersuchungen deswegen noch nicht beantwortet, weil man die Kugelfunktionen durch geeignete Umformungen zwar in verschiedener Weise als hypergeometrische Reihen darstellen kann, aber nicht so, dass $P_{n+1} = F(\alpha+1, \beta, \gamma+1, x)$ wäre, wenn $P_n = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ist. Wenn nun für die Cylinderfunktionen dies allerdings in gewisser Weise möglich ist, so bleibt es doch fraglich, ob die von Thomé und Riemann angewandten Schlüsse bei dem Grenzübergang, den man vornehmen muss, um die Cylinderfunktionen als hypergeometrische Reihen darzustellen, ihre Gültigkeit behalten. Aus diesen beiden Gründen scheint für die genannten Funktionen eine besondere Untersuchung ihrer Kettenbruchent-

---

1) Gauss Werke Bd. III, S. 125 ff. Disquisitiones generales .. und Nachlass.

2) Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 66, S. 822—336, Bd. 67, S. 299—309.

3) Riemann, ges. math. Werke S. 62—78, 400—496.

wickelung erforderlich. Dieselbe soll im Folgenden unter Beschränkung auf einen ganzzahligen Index der Funktionen nach vorheriger Angabe der für diesen Zweck wichtigsten Formeln in den Abschnitten I und II, sowie nach Ableitung einer neuen Integraldarstellung in den Abschnitten III und IV angestellt werden.

I.

Die Kugelfunktion erster Art $P_n(x)$, welche von Legendre und Laplace in die Wissenschaft eingeführt worden ist, möge definirt werden als dasjenige Integral der Differentialgleichung

$$(1) \qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0,$$

in der n irgend eine positive ganze Zahl bedeutet, welches für jeden endlichen Wert von x endlich bleibt. Daneben stellt Heine[1]) als Kugelfunktion zweiter Art eine Funktion $Q_n(x)$, die er zunächst durch einen Querschnitt in der Ebene der komplexen Variabeln x von -1 bis $+1$ zu einer eindeutigen Funktion des Ortes macht und dann durch die folgenden Anforderungen bestimmt:

1) sie soll bis an den Querschnitt der Differentialgleichung genügen;

2) bis an den Querschnitt kontinuirlich bleiben; nur in den Punkten ± 1 darf sie unendlich werden;

3) mit x^{n+1} multipliziert für $x=\infty$ gleich werden

$$\frac{1.2\ldots\ n}{3.5\ldots(2n+1)}$$

4) im Querschnitt das arithmetische Mittel aus den beiden Werten an den Uferrändern bedeuten, also bestimmt sein durch die Gleichung

$$Q_n(x) = \tfrac{1}{2}Q_n(x+\varepsilon i) + \tfrac{1}{2}Q_n(x-\varepsilon i),$$

wenn unter ε eine verschwindende reelle Grösse verstanden wird.

---

1) Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, Bd. 1 S. 127 u. 128.

Die so definierte Funktion genügt der Differentialgleichung (1) in der ganzen Ebene mit Ausschluss der Umgebung des Querschnittes, und genügt ihr wieder im Querschnitt selbst.

Die beiden betrachteten Funktionen P_n und Q_n sollen nun zunächst durch Reihen und dann durch Integrale wirklich dargestellt werden.

Die Integration durch Reihen liefert für jedes x

$$(2a) \qquad P_n(x) = \frac{1.3..(2n-1)}{1.2..\quad n} \cdot \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \ldots \right\}$$

und für $Mx < 1$

$$(2b) \qquad Q_n(x) = \frac{1.2..\quad n}{3.5...(2n+1)} \cdot \left\{ x^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2.(2n+3)} x^{-n-3} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2.4(2n+3)(2n+5)} x^{-n-5} + \ldots \right\}.$$

Durch die Substitution

$$\xi = x - \sqrt{x^2-1}$$

erhält Heine[1]) für $M\xi < 1$, d. h. für alle Werte von x mit Ausnahme der reellen Werte zwischen den Grenzen -1 und $+1$ die Darstellung

$$(2c) \qquad Q_n(x) = \frac{2.2.4..\quad 2n}{3.5...(2n+1)} \cdot \xi^{n+1} F(\tfrac{1}{2}, n+1, n+\tfrac{3}{2}, \xi^2),$$

worin das Symbol $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ die hypergeometrische Reihe

$$1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} \cdot x + \frac{\alpha(\alpha+1).\beta.(\beta+1)}{1.2.\quad \gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots$$

bedeutet. Daraus gewinnt Heine[2]) für einen Punkt im Querschnitt selbst, wenn $x = \cos\vartheta$ gesetzt wird,

$$(2d) \quad Q_n(x) = 2 \cdot \frac{2.4..\quad 2n}{3.5..(2n+1)} \left(\cos(n+1)\vartheta + \frac{1.(n+1)}{1.(2n+3)} \cdot \cos(n+3)\vartheta + \frac{1.3.(n+1)(n+2)}{1.2\,(2n+3)(2n+3)} \cdot \cos(n+5)\vartheta + \ldots \right),$$

sowie für einen Punkt am Uferrande

$$(2e) \qquad Q_n(x \pm \varepsilon\iota) = Q_n(x) \mp \tfrac{1}{2}\iota\pi P_n(x).$$

---

1) Heine l. c. S. 129.
2) Heine l. c. S. 130.

Die erste Integraldarstellung der Funktion $P_n(x)$ vermittelst der Beziehung

$$(3a) \qquad P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n d\varphi$$

rührt von Laplace her. Daran schliesst sich die von Heine[1]) gegebene zweite Darstellung

$$(3b) \qquad P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{n+1}}.$$

Unter Benutzung der bekannten Summationsformel

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=C.\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du,$$

$$C=\frac{\Pi(\beta-1).\Pi(\gamma-\beta-1)}{\Pi(\gamma-1)}$$

gewinnt der letztere[2]) für alle Punkte x, die nicht im Querschnitte liegen, die entsprechende Gleichung

$$(3c) \qquad Q_n(x)=\int_0^{\infty}\frac{d\varphi}{(x+\cos i\varphi\sqrt{x^2-1})^{n+1}},$$

und daraus für einen Punkt $x=\cos\vartheta$ im Querschnitt selbst

$$(3d) \qquad 2Q_n(x)=\int_0^{\infty}\frac{d\varphi}{(x+\cos i\varphi\sqrt{x^2-1})^{n+1}}$$

$$+\int_0^{\infty}\frac{d\varphi}{(x-\cos i\varphi\sqrt{x^2-1})^{n+1}}.$$

Die für den vorliegenden Zweck äusserst wichtige Rekursionsformel der Kugelfunktionen

$$(4) \qquad (n+1).P_{n+1}(x)-(2n+1)x.P_n(x)+n.P_{n-1}(x)=0,$$

---

1) Heine l. c. S. 36.
2) Heine l. c. S. 132.

welche im wesentlichen schon bei Gauss[1]) vorkommt, und aus der die Entwickelung des Quotienten $P_{n+1} : P_n$ in einem Kettenbruch gewonnen wird, beweist Heine[2]) unter Benutzung der Beziehung

$$T=(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\alpha^n . P_n(x).$$

Wir ziehen es jedoch vor, hierfür sowie für die entsprechende Gleichung

(4a) $\quad (n+1)Q_{n+1}(x)-(2n+1)xQ_n(x)+nQ_{n-1}(x)=0$

einen neuen Beweis im Abschnitt III zu erbringen.

II.

Die Cylinderfunktionen, auch Besselsche Funktionen genannt, sind zuerst von Fourier[3]) und Bessel[4]) eingehend behandelt worden.

Ebenso wie bei den Kugelfunktionen kannte man ursprünglich nur eine Art derselben, nämlich die der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0$$

genügende Funktion

$$(2) \quad J_n(x)=\frac{x^n}{2^n . \Pi n}\cdot\left\{1-\frac{x^2}{2(2n+2)}+\frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)}-\cdots\right\},$$

die schon von Bessel durch das folgende Integral

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi-n\varphi)\,d\varphi$$

ausgedrückt worden ist.

Neben diese Cylinderfunktion erster Art stellen wir

---

1) Gauss, Methodus nova integralium valores per approx. inveniendi no. 19. Bd. III S. 166 ff.

2) Heine l. c. S. 91.

3) Fourier, Théorie analytique de la chaleur 1822 S. 369.

4) Bessel, Untersuchungen des Teils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht. Abh. der Berl. Akademie der Wiss. aus dem Jahre 1824, math. Klasse S. 1—52.

nach Heine[1]) das folgende Integral derselben Differentialgleichung als Cylinderfunktion zweiter Art.

Durch die Substitution $y=x^n z$ geht (1) über in

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{2n+1}{x}\frac{dz}{dx}+z=0 \tag{1a}$$

Setzt man

$$z=\int_\alpha^\beta e^{xi\cos\varphi}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi$$

in dieselbe ein, so erhält man

$$\int_\alpha^\beta e^{xi\cos\varphi}\sin^{2n}\varphi(-x\cos^2\varphi+i.(2n+1)\cos\varphi+x)\,d\varphi$$

$$=i[e^{ix\cos\varphi}\sin^{2n+1}\varphi]_\alpha^\beta,$$

also ein Integral, wenn α und β so gewählt werden, dass die rechte Seite Null ist, d. h. $e^{ix\cos\varphi}\sin^{2n+1}\varphi$ für α und β denselben Wert annimmt. Dies wird erreicht durch die Bedingung $\beta=\alpha+2m\pi$. Im Besonderen erhält man die von Heine gegebenen Lösungen, wenn man solche Grenzen α und β sucht, für welche $e^{ix\cos\varphi}\sin^{2n+1}\varphi$ verschwindet. Dies geschieht einerseits durch die Bedingung $\sin^{2n+1}\varphi=0$, welche das Integral

$$\int_0^\pi e^{ix\cos\varphi}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi$$

liefert, andererseits durch Hinzuziehung der Bedingung

$$e^{ix\cos\varphi}=0,$$

die nur durch einen unendlich grossen imaginären Wert von φ erfüllt werden kann. Daher soll in dieser zweiten Lösung $i\varphi$ statt φ geschrieben werden. Der oberen Grenze wird nun von Heine[2]) folgender Wert beigelegt. Ist x irgend eine beliebige Zahl mit nicht negativem imaginärem Teile, und setzt man

$$-ix=a(\cos\alpha-i\sin\alpha),\ -\frac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2};$$

bezeichnet man ferner mit g das reell positiv Unendliche,

1) Heine l. c. S. 237.

2) Heine l. c. S. 193, Anm. u. S. 237.

sowie mit χ irgend einen Wert zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ mit Ausschluss dieser Grenzen, so soll die obere Integrationsgrenze

$$g + (\alpha + \chi)i$$

sein. Nachdem Heine dann noch durch einen Querschnitt längs der reellen Axe der x ein Ueberschreiten derselben bei der Integration unmöglich gemacht hat, beweist er von dem Integral

$$f_n(x) = \int_0^{g+(\alpha+\chi)i} e^{ix\cos\varphi i} \sin^{2n} i\varphi \, d\varphi,$$

dass dasselbe eine Bedeutung hat und der Differentialgleichung (1a) genügt, weil die Exponentialfunktion an der oberen Grenze verschwindet, und dass das Integral von dem Integrationswege sowie von dem speziellen Werte von χ unabhängig ist, da die verschiedenen Integrationswege einen Raum einschliessen, in welchem die zu integrierende Funktion endlich und einwertig bleibt. Die so definierte Funktion f_n wird noch ausgedehnt auf den Fall eines reellen x sowie eines solchen mit negativ imaginärem Teile durch die beiden Bestimmungen, dass die Funktion für reelles x gleich dem arithmetischen Mittel aus den Werten am Rande des Querschnitts und dass im zweiten Fall

$$f_n(-x) = f_n(x)$$

sein soll.

Unter Hinzufügung eines konstanten Faktors erhält man nun die beiden Lösungen der Differentialgleichung (1)

$$(3a) \qquad J_n(x) = \frac{x^n}{1.3..(2n-1)} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{xi\cos\varphi} \sin^{2n}\varphi \, d\varphi,$$

$$(3b) \qquad Y_n(x) = \frac{x^n}{1.3..(2n-1)} \cdot \int_0^{\infty} e^{ix\cos i\varphi} \sin^{2n} i\varphi \, d\varphi,$$

worin ∞ den oben angegebenen Wert $g+(\alpha+\chi)i$ besitzt. Von diesen stimmt die erste mit der vorhin erwähnten Cylinderfunktion erster Art überein; die zweite möge nach Heine Cylinderfunktion zweiter Art genannt werden. Für

beide Lösungen gewinnt Heine[1]) unter Benutzung der Jacobi'schen[2]) Transformationsformel, deren Gültigkeit er im vorliegenden Fall auch auf die Integrationsgrenzen 0 und ∞ ausdehnen kann, da die bei der partiellen Integration ausserhalb des Integralzeichens auftretende Funktion nicht nur an den Grenzen 0 und π, sondern auch für 0 und ∞ verschwindet, noch die folgende Darstellung:

$$(3c) \qquad J_n(x) = \frac{(-i)^n}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} e^{xi\cos\varphi} \cos n\varphi \, d\varphi$$

$$(3d) \qquad Y_n = (-i)^n \cdot \int_0^{\infty} e^{ix\cos i\varphi} \cos in\varphi \, d\varphi.$$

Schon in der Einleitung ist hervorgehoben worden, dass ein innerer Zusammenhang zwischen Kugelfunktionen und Cylinderfunktionen besteht. Um diesen wenigstens für J_0 anzuführen, bringen wir die Kugelfunktion P_m, deren Argument mit $\cos\vartheta$ bezeichnet werden möge, auf die Form

$$P_m(\cos\vartheta) = F\left(m+1, -m, 1, \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right).^{3})$$

Lassen wir nun m unendlich gross werden, so erhalten wir gerade J_0, mithin die Beziehung

$$J_0(x) = P_m\left(\cos\frac{x}{m}\right) = F\left(m+1, -m, 1, \frac{xx}{2m.2m}\right), \lim m = \infty.$$

Dementsprechend erhält man allgemein

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n.\Pi n} \cdot F\left(m+1, -m, n, \frac{xx}{2m.2m}\right), \lim m = \infty.$$

Ebenso wie J_0 lassen sich sämtliche Cylinderfunktionen als Grenzfälle gewisser Funktionen betrachten, die Heine[4]) als zugeordnete Funktionen der Kugelfunktionen bezeichnet, die aber für die vorliegende Untersuchung ohne Interesse sind.

---

1) Heine l. c. S. 237.
2) Crelle, Journal für die Mathematik, Bd. 15. S. 13.
3) Heine l. c. S. 18.
4) Heine l. c. S. 232 und 233.

Aus der letzten Gleichung soll noch eine Folgerung gezogen werden. Aus ihr folgt nämlich unter Benutzung der bekannten Summationsformel der hypergeometrischen Reihe die der Gleichung

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Pi n} \cdot C \cdot \int_0^1 s^{n-1}(1-s)^{n+m-1}\left(1-\frac{xx}{2m.2m}\cdot s\right)^{-m-1} ds, \lim m = \infty.$$

Dieses Integral, welches in der Riemann'schen Konvergenzuntersuchung eine Hauptrolle spielt, ist aber zur Darstellung von $J_n(x)$ ganz ungeeignet, da es wegen der Beziehung

$$\left(1-\frac{xx}{2m\,2m}\cdot s\right)^{-m} = e^{-\frac{x}{2}\sqrt{s}}\, e^{+\frac{x}{2}\sqrt{s}} = 1$$

von x unabhängig wird. Es folgt mithin hieraus, dass die Riemann'schen Betrachtungen sich nicht auf die Cylinderfunktionen ausdehnen lassen.

Auch für die Cylinderfunktionen existiert, wie für die Kugelfunktionen, eine Rekursionsformel, und zwar die folgende

(4) $$xJ_n - 2(n+1)J_{n+1} + xJ_{n+2} = 0,$$
$$xY_n - 2(n+1)Y_{n+1} + xY_{n+2} = 0,$$

worin das Argument x fortgelassen ist. Dieselbe ist für die Cylinderfunktionen erster Art von Bessel[1]), für diejenigen zweiter Art von Heine[2]) aufgestellt und bewiesen. Wir wollen im Abschnitt IV für diese Formel, aus der die Kettenbruchentwickelung der Cylinderfunktionen folgt, eine neue Ableitung geben.

III.

Die Rekursionsformel I, 4 lässt sich auch als Differenzengleichung auffassen. Kann man unter den Integralen derselben die Kugelfunktionen nachweisen, so ist damit der

---

1) Bessel l. c. S. 31.
2) Heine l. c. S. 243.

noch fehlende Beweis erbracht, dass dieselben jener Rekursionsformel genügen.

Die Differenzengleichung

$$(n+2).y_{n+2}-(2n+3).xy_{n+1}+(n+1)y_n=0$$

integriert man nach Laplace durch das Integral

$$y_n=\int_\alpha^\beta s^{-n+1}V ds,$$

in welchem man die noch unbestimmten Grössen V sowie α und β durch die Differenzengleichung zu bestimmen sucht. Durch Einsetzen gewinnt man nämlich

$$\int_\alpha^\beta s^{-n-1}((n+1)s^2-(2n+3)xs+n+2).V ds=0$$

und hieraus durch partielle Integration

$$\int_\alpha^\beta s^{-n-1}\left[s\frac{d[V(s^2-2xs+1)]}{ds}+V(s^2-3xs+2)\right]ds$$

$$-[s^{-n}V(s^2-2xs+1)]_\alpha^\beta=0.$$

Man genügt dieser Gleichung durch die beiden gleichzeitigen Annahmen

$$sd\{V(s^2-2xs+1)\}+V(s^2-3xs+2)ds=0,$$

$$[s^{-n}.V(s^2-2xs+1)]_\alpha^\beta=0.$$

Aus der ersten folgt

$$\log\{V(s^2-2xs+1\}=-\int\frac{s^2-3xs+2}{(s^2-2xs+1)s}.ds$$

sowie wegen der Beziehung

$$\frac{s^2-3xs+2}{(s^2-2xs+1)s}=\frac{2}{s}-\frac{s-x}{s^2-2xs+1}$$

die Gleichung

$$\log\{V(s^2-2xs+1)\}=-\log s^2+\log(s^2-2xs+1)^{1/2}$$

und endlich

$$V=s^{-2}(s^2-2xs+1)^{-1/2}.$$

Für die Grenzen erhält man demnach die Bedingung

$$\left(s^{-n-2}(s^2-2xs+1)^{+1/2}\right)_{\alpha}^{\beta}=0.$$

Allgemein hat man also solche Wertepaare α und β zu suchen, für welche die Klammer denselben Wert annimmt. Bestimmen wir jedoch sogleich diejenigen, für welche sie Null wird, so erhalten wir einerseits die Wurzeln der Gleichung

$$s^2-2xs+1=0$$

d. h.

$$s_1=x+\sqrt{x^2-1}$$
$$s_2=x-\sqrt{x^2-1},$$

andererseits

$$s=\infty.$$

Dadurch gewinnen wir die beiden Integrale:

$$y_{1,n}=\int_{x-\sqrt{x^2-1}}^{x+\sqrt{x^2-1}} s^{-n-1}(s^2-2xs+1)^{-1/2}ds,$$

$$y_{2,n}=\int_{x+\sqrt{x^2-1}}^{\infty} s^{-n-1}(s^2-2xs+1)^{-1/2}ds$$

Um nun zu entscheiden, ob die Grössen $y_{1,n}$ und $y_{2,n}$ die gesuchten Kugelfunktionen sind, haben wir sie durch geeignete Substitutionen auf bekannte Integralformen derselben zurückzuführen. Durch den Ansatz

$$s=x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}$$

geht das erste Integral über in I, 3b, multipliziert mit $i.\pi$, das zweite in I, 3c. Damit ist die Rekursionsformel der Kugelfunktionen bewiesen; zugleich sind die beiden neuen Integraldarstellungen

$$P_n(x)=\frac{-i}{\pi}\int_{x-\sqrt{x^2-1}}^{x+\sqrt{x^2-1}} s^{-n-1}(s^2-2xs+1)^{-1/2}ds, \tag{5}$$

$$Q_n(x)=\int_{x+\sqrt{x^2-1}}^{\infty} s^{-n-1}(s^2-2xs+1)^{-1/2}ds \tag{5a}$$

gewonnen. Es erscheint noch bemerkenswert, dass in den beiden letzten Integralen der Ausdruck

$$(s^2-2xs+1)^{-1/2}$$

vorkommt, durch dessen Entwickelung nach steigenden Potenzen von s die Kugelfunktionen erster Art zuerst erhalten worden sind.

IV.

Setzt man in die Differenzengleichung

$$xy_n-(2n+2)y_{n+1}+xy_{n+2}=0$$

den Wert:

$$y_n=\int_\alpha^\beta s^{-n+1}V ds$$

ein, so erhält man die Bedingung

$$\int_\alpha^\beta s^{-n-1}(x-2s+xs^2-2ns)V ds=0$$

und hieraus durch partielle Integration

$$\int_\alpha^\beta s^{-n-1}\left[V(x-2s+xs^2)-s\frac{d(V2s)}{ds}\right]ds+\left[s^{-n}V2s\right]_\alpha^\beta=0.$$

Derselben genügt man durch die beiden gleichzeitigen Annahmen

$$V(x-2s+xs^2)-s.\frac{d(V2s)}{ds}=0,$$

$$s^{-n}V2s\Big)_\alpha^\beta=0.$$

Nun giebt die erste derselben

$$V=\tfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}s^{-2},$$

so dass man zur Bestimmung der Grenzen die Gleichung

$$\left(\tfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}s^{-n-1}\right)_\alpha^\beta=0$$

erhält.

Ohne allgemein nach den Wertepaaren zu fragen, für welche die Klammer denselben Wert annimmt, wollen wir sogleich die Grenzen so zu bestimmen suchen, dass das Integral gleich einer Cylinderfunktion werde.

Es war

$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{\pi} \int_0^{\pi} e^{xi\cos\varphi} \cos n\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{xi\cos\varphi} \cos n\varphi \, d\varphi.$$

Setzen wir

$$\frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right) = i\cos\varphi,$$

so erhalten wir für s die beiden Werte

$$s_1 = i(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$
$$s_2 = i(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Unter Benutzung des ersten wird

$$s^{-n-1} = (-i)^{n+1}(\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi),$$
$$ds = (\cos\varphi - i\sin\varphi)\, d\varphi,$$

mithin

$$2y_n = (-i)^{n+1} \int_{\alpha'}^{\beta'} e^{xi\cos\varphi} (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\, d\varphi$$

$$= (-i)^{n+1} \int_{\alpha'}^{\beta'} e^{xi\cos\varphi} \cos n\varphi \, d\varphi + (-i)^n \int_{\alpha'}^{\beta'} e^{xi\cos\varphi} \sin n\varphi \, d\varphi.$$

Wählen wir nun α und β so, dass α' und β' 0 und 2π werden, so verschwindet das zweite Integral und es wird

$$2y_n \cdot \frac{i}{2\pi} = J_n(x).$$

Nun wird, da $s = i(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ ist, sowohl α als auch β gleich i. Folglich ist

$$J_n = \frac{i}{2\pi} \int_i^i e^{\frac{x}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right)} s^{-n-1} \, ds,$$

und zwar erstreckt sich die Integration über den Einheitskreis um den Nullpunkt in einer der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzten Richtung.

Wählt man den zweiten Wert

$$s = i(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

so verwandelt sich nur die Integrationsrichtung in die entgegengesetzte, und man erhält

$$J_n(x) = \frac{-i}{2\pi}\int_{i}^{i} e^{\frac{x}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)} s^{-n-1}\,ds.$$

Um nun die Cylinderfunktionen zweiter Art zu gewinnen, bestimmen wir in der Gleichung

$$2y_n = (-i)^{n+1}\int_{\alpha'}^{\beta'} e^{xi\cos\varphi}\cos n\varphi\,d\varphi + (-i)^{+n}\int_{\alpha'}^{\beta'} e^{xi\cos\varphi}\sin n\varphi\,d\varphi$$

α' und β' gleich $-\infty$ und $+\infty$. Dann verschwindet wieder das zweite Integral, und es wird

$$2y_n = -i.2Y_n.$$

Dabei werden die Grenzen α und β 0 und ∞, mithin ist

$$Y_n(x) = \frac{i}{2}\int_{0}^{\infty} e^{\frac{x}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)} s^{-n-1}\,ds,$$

und zwar ist das Integral, nachdem ein Umkreisen des Nullpunktes durch einen Querschnitt längs der reellen Axe der s Ebene unmöglich gemacht ist, so aus der Null ins Unendliche zu führen, dass der Exponent an den beiden Grenzen einen negativ unendlichen reellen Teil besitzt. Alsdann lässt sich zeigen, genau wie es Heine (l. c.) für das Integral

$$Y_n(x) = \frac{x^n}{1.3..(2n-1)}\cdot\int_{0}^{g+(\alpha+\chi).i} e^{xi\cos i\varphi}\sin^{2n} i\varphi\,d\varphi$$

nachgewiesen hat, dass das Integral einen Sinn hat und unabhängig vom Integrationsweg ist.

Da schliesslich auch die Bedingung

$$(V2ss^{-n})_{\alpha}^{\beta} = 0$$

von beiden Integralen erfüllt wird, so ist zugleich mit dem Beweise der Rekursionsformel für die Cylinderfunktionen die Integraldarstellung

$$(5) \qquad J_n(x) = \frac{i}{2\pi}\int_{i}^{i} e^{\frac{x}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)} s^{-n-1}\,ds,$$

$$(5a) \qquad Y_n = \frac{i}{2}\int_{0}^{\infty} e^{\frac{x}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)} s^{-n-1}\,ds$$

gewonnen.

Die zwischen Kugel- und Cylinderfunktionen stattfindende Übereinstimmung führt auf die Vermutung, dass sich

$$e^{\frac{x}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)}$$

nach Cylinderfunktionen entwickeln lassen wird. In der That gewinnt man, indem man nach steigenden Potenzen des Exponenten entwickelt und dann nach Potenzen von s ordnet, die schon von Herrn Lommel[1]) auf etwas anderem Wege gefundene Gleichung

$$e^{\frac{x}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)} = J_0 + \left(s-\frac{1}{s}\right)J_1 + \left(s^2+\frac{1}{s^2}\right)J_2 + \ldots\ldots$$

$$+ \left(s^n + \left(\frac{-1}{s}\right)^n\right)J_n + \ldots$$

Setzt man diese Entwickelung in Gleichung 5 ein, so erhält man auch rechts J_n.

V.

Wenn[2]) zwischen je drei aufeinander folgenden Grössen f_λ, $f_{\lambda+1}$, $f_{\lambda+2}$ eine lineare Gleichung von der Form

$$f_\lambda + r_\lambda f_{\lambda+1} + s_\lambda f_{\lambda+2} = 0$$

1) Lommel, Studien über die Bessel'schen Funktionen S. 32.
2) Heine l. c. S. 260 ff.

besteht, so lässt sich der Quotient $f_1 : f_0$ nach geeigneter Division in einem Kettenbruch der folgenden Art

$$\cfrac{a_0}{1-\cfrac{a_1}{1-\cfrac{a_2}{1\,.\,.\,\cdot s\,.\,.}}}$$

entwickeln. Dadurch erhält man die Gleichung

$$\frac{f_1}{f_0} = \left| \begin{matrix} a_0 & a_1 & \dots & a_\mu & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots \end{matrix} \right|, \tag{6}$$

worin der symbolische Ausdruck rechts den Kettenbruch bezeichnen soll. Bricht man denselben hinter $\frac{a_\mu}{1}$, dem μ^{ten} Partialbruch ab, so erhält man den μ^{ten} Näherungswert und durch Einrichten desselben den μ^{ten} Näherungszähler Z_μ und Näherungsnenner N_μ. Für diese gelten die bekannten Rekursionsformeln

$$\begin{array}{ll|ll} & Z_0 = a_0, & & N_0 = 1 \\ & Z_1 = a_0, & & N_1 = 1 - a_1 \\ (7) & Z_2 = Z_1 - a_2 Z_0, & & N_2 = N_1 - a_2 N_0 \\ & \dots\dots & & \dots\dots \\ & Z_{\mu+1} = Z_\mu - a_{\mu+1} Z_{\mu-1} & & N_{\mu+1} = N_\mu - a_{\mu+1} \,.\, N_{\alpha-1}. \end{array}$$

Hieraus folgen sofort die beiden Kettenbrüche

$$\frac{Z_{\mu-1}}{Z_\mu} = \left| \begin{matrix} 1 & a_\mu & . & . & a_2 \\ 1 & 1 & . & . & 1 \end{matrix} \right|, \tag{8a}$$

$$\frac{N_{\mu-1}}{N_\mu} = \left| \begin{matrix} 1 & a_\mu & \dots & a_1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{matrix} \right|, \tag{8b}$$

Wird hingegen die Kettenbruchentwickelung nur bis zum $\mu+1^{\text{ten}}$ Partialbruch fortgesetzt, so erhält man

$$\frac{f_1}{f_0} = \left| \begin{matrix} a_0 & a_1 & \dots & a'_{\mu+1} \cdot \dfrac{f_{\mu+2}}{f_{\mu+1}} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{matrix} \right|. \tag{9}$$

Bezeichnet man Zähler und Nenner des eingerichteten Bruches mit $Z'_{\mu+1}$ und $N'_{\mu+1}$, so wird offenbar

$$Z_{\mu+1} = Z_\mu - a_\mu \cdot Z_{\mu-1} \frac{f_{\mu+2}}{f_{\mu+1}}$$

$$N_{\mu+1} = N_\mu - a_\mu \cdot N_{\mu-1} \cdot \frac{f_{\mu+2}}{f_{\mu+1}}.$$

Daraus folgt

(10a) $$\frac{f_1}{f_0} = \frac{Z_\mu \cdot f_{\mu+1} - a'_{\mu+1} \cdot Z_{\mu-1} \cdot f_{\mu+2}}{N_\mu \cdot f_{\mu+1} - a'_{\mu+1} \cdot N_{\mu-1} \cdot f_{\mu+2}},$$

(10b) $$cf_1 = Z_\mu \cdot f_{\mu+1} - a'_{\mu+1} \cdot Z_{\mu-1} \cdot f_{\mu+2},$$

(10c) $$cf_0 = N_\mu \cdot f_{\mu+1} - a'_{\mu+1} \cdot N_{\mu-1} \cdot f_{\mu+2}.$$

Durch Anwendung der Rekursionsformeln für Näherungszähler und Nenner gewinnt man hier aus

$$cf_1 N_\mu - cf_0 Z_\mu = a_0 \cdot a_1 \ldots a'_{\mu+1} \cdot f_{\mu+2},$$

sowie endlich durch die Division

(11) $$\frac{f_1}{f_0} - \frac{Z_\mu}{N_\mu} = \frac{a_0 \cdot a_1 \ldots a'_{\mu+1} \cdot f_{\mu+2}}{c \cdot N_\mu \cdot f_0}.$$

Mit der Zahl der Grössen f wird auch der Kettenbruch unendlich. Damit nun der unendliche Kettenbruch gegen den erzeugenden Quotienten konvergiere, ist die notwendige und hinreichende Bedingung das Verschwinden des Restes

$$R = \frac{a_0 \cdot a_1 \ldots a_{\mu+1} \cdot f_{\mu+2}}{c \cdot N_\mu \cdot f_0}, \quad \lim \mu = \infty.$$

Der im Rest vorkommende μ^{te} Näherungsnenner lässt sich unter der folgenden Bedingung eliminieren.

Zwischen je drei auf einander folgenden Grössen ψ_λ, $\psi_{\lambda+1}$, $\psi_{\lambda+2}$ mögen solche lineare Gleichungen bestehen, dass daraus der Kettenbruch

(12) $$\frac{\psi_1}{\psi_0} = \begin{vmatrix} a'_{\mu+1} & a_\mu & \ldots & a_0 \cdot \dfrac{\psi_{\mu+2}}{\psi_{\mu+1}} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

folgt, in welchem die Grössen $a_{\mu+1}$ bis a_0 denselben Wert haben wie in Gleichung 9. Werden die hier auftretenden Näherungs-Zähler und Nenner mit $\mathfrak{Z}_\mu$ und $\mathfrak{N}_\mu$ bezeichnet, so folgen die den obigen ganz entsprechenden Gleichungen

$$(13)\qquad \begin{array}{l|l} \mathfrak{Z}_0 = a'_{\mu+1} & \mathfrak{N}_0 = 1 \\ \mathfrak{Z}_1 = a'_{\mu+1} & \mathfrak{N}_1 = 1 - a_\mu \\ \mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}_1 - a_{\mu-1}\mathfrak{Z}_0 & \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_1 - a_{\mu-1}\mathfrak{N}_0 \\ \dot{\mathfrak{Z}}_{\mu+1} = \dot{\mathfrak{Z}}_\mu - a_0\dot{\mathfrak{Z}}_{\mu-1} & \dot{\mathfrak{N}}_{\mu+1} = \dot{\mathfrak{N}}_\mu - a_0\dot{\mathfrak{N}}_{\mu-1} \end{array}$$

$$(14a)\qquad \frac{\mathfrak{Z}_\mu}{\mathfrak{N}_\mu} = \begin{vmatrix} a'_{\mu+1}\,.\,a_\mu \;\ldots\; a_1 \\ 1 \;.\; 1 \;\ldots\; 1 \end{vmatrix} = a'_{\mu+1} \begin{vmatrix} 1 \;\; a_\mu \;\; .\; .\; a_1 \\ 1 \;\; 1 \;\; .\; .\; 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a'_{\mu+1}\,.\,N_{\mu+1}}{N_\mu}\,.$$

$$(14b)\qquad \frac{\mathfrak{Z}_{\mu-1}}{\mathfrak{N}_{\mu-1}} = \begin{vmatrix} a'_{\mu+1} \;\; a_\mu \;\ldots\; a_2 \\ 1 \qquad 1 \;\ldots\; 1 \end{vmatrix} = a'_{\mu+1} \begin{vmatrix} 1 \;\; a_\mu \;\; .\; .\; a_2 \\ 1 \;\; 1 \;\; .\; .\; 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a'_{\mu+1} Z_{\mu+1}}{Z_\mu}\,.$$

$$(15a)\qquad \frac{\psi_1}{\psi_0} = \frac{\mathfrak{Z}_\mu\,.\,\psi_{\mu+1} - a_0\,.\,\mathfrak{Z}_{\mu-1}\,.\,\psi_{\mu+2}}{\mathfrak{N}_\mu\,.\,\psi_{\mu+1} - a_0\,.\,\mathfrak{N}_{\mu-1}\,.\,\psi_{\mu+2}}\,.$$

$$(15b)\qquad k\psi_1 = \mathfrak{Z}_\mu\,.\,\psi_{\mu+1} - a_0\,.\,\mathfrak{Z}_{\mu-1}\,.\,\psi_{\mu+2},$$

$$(15c)\qquad k\psi_0 = \mathfrak{N}_\mu\,.\,\psi_{\mu+1} - a_0\,.\,\mathfrak{N}_{\mu-1}\,.\,\psi_{\mu+2},$$

$$(16)\qquad \frac{\psi_1}{\psi_0} - \frac{\mathfrak{Z}_\mu}{\mathfrak{N}_\mu} = \frac{a'_{\mu+1}\,.\,a_\mu\,.\,.\,a_0\,.\,\psi_{\mu+2}}{k\,\mathfrak{N}_\mu\,.\,\psi_0},$$

Unter Benutzung der aus 14a und 14b folgenden Gleichungen

$$\mathfrak{Z}_\mu = a'_{\mu+1}\,.\,N_{\mu+}\,,\quad \mathfrak{Z}_{\mu-1} = a'_{\mu+1}\,.\,Z_{\mu-1},$$
$$\mathfrak{N}_\mu = \qquad N_\mu\,,\quad \mathfrak{N}_{\mu-1} = \qquad Z_\mu,$$

giebt Gleichung 16

$$k\psi_1\,.\,N_\mu - k\psi_0\,.\,a'_{\mu+1}\,.\,N_{\mu+1} = a_0 \ldots a'_{\mu+1}\,.\,\psi_{\mu+2}$$

oder

$$N_{\mu+1} = \frac{k\psi_1 N_\mu - a_0\,.\,.\,a'_{\mu+1}\,.\,\psi_{\mu+2}}{k\psi_0\,.\,a'_{\mu+1}}\,.$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in 10c gewinnt man

$$cf_0 = N_\mu\,.\,f_{\mu+1} - a'_{\mu+1}\,.\,f_{\mu+2}\,.\,\frac{k\psi_1 N_\mu - a_0\,.\,.\,a'_{\mu+1}\,.\,\psi_{\mu+2}}{k\psi_0\,.\,a'_{\mu+1}}$$

und hieraus

$$N_\mu = \frac{ckf_0\psi_0 - a_0 a_1\,.\,.\,a'_{\mu+1} f_{\mu+2}\,.\,\psi_{\mu+2}}{kf_{\mu+1}\,.\,\psi_0 - kf_{\mu+2}\,.\,\psi_1}\,.$$

Folglich wird schliesslich

$$(17) \qquad R = \frac{a_0 \ldots a'_{\mu+1} \cdot f_{\mu+2}(kf_{\mu+1} \cdot \psi_0 - kf_{\mu+2} \cdot \psi_1)}{cf_0(ckf_0\psi_0 - a_0 \ldots a'_{\mu+1} \cdot f_{\mu+2} \cdot \psi_{\mu+2})}.$$

VI.

Aus der Rekursionsformel der Kugelfunktionen

$$(n+2) \cdot P_{n+2} - (2n+3)xP_{n+1} + (n+1)P_n = 0,$$

in der das Argument x fortgelassen ist, folgt nach geeigneter Division der Kettenbruch

$$\frac{f_1}{f_0} = \left| \begin{matrix} a_0 & a_1 & \ldots & a'_{\mu+1} \cdot \dfrac{f_{\mu+2}}{f_{\mu+1}} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{matrix} \right|$$

mit den speziellen Werten

$$(18) \qquad \begin{array}{ll} f_1 = P_n, & a_0 = \dfrac{n+1}{(2n+3)x}, \\ f_1 = P_{n+1}, & a_1 = \dfrac{(n+2)^2}{(2n+3)(2n+5)xx}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ f_{\mu+1} = P_{n+\mu+1}, & a_{\mu+1} = \dfrac{(n+\mu+1)^2}{(2n+2\mu+1)(2n+2\mu+3)xx}, \\ f_{\mu+2} = P_{n+\mu+2}, & a'_{\mu+1} = \dfrac{n+\mu+2}{(2n+2\mu+3)x}. \end{array}$$

Die im Rest auftretende Grösse c lässt sich durch vollständige Induktion bestimmen. Nehmen wir an, die Entwickelung sei bis zu einem bestimmten Werte $\mu = \lambda$ fortgesetzt und der dabei auftretende Wert von c, der mit c_λ bezeichnet werden möge, sei bekannt. Alsdann ist

$$(a) \qquad c_\lambda f_1 = Z_\lambda f_{\lambda+1} - a'_{\lambda+1} \cdot Z_{\lambda-1} f_{\lambda+2}.$$

Wird dagegen die Entwickelung bis zu dem Werte $\mu = \lambda + 1$ fortgesetzt, so erhalten wir die Gleichung

$$(b) \qquad c_{\lambda+1} f_1 = Z_{\lambda+1} f_{\lambda+2} - a'_{\lambda+2} \cdot Z_\lambda \cdot f_{\lambda+3}$$

mit der zu bestimmenden Grösse $c_{\lambda+1}$.

Benutzen wir zur Umformung der rechten Seite die Beziehungen

$$Z_{\lambda+1} = Z_\lambda - a_{\lambda+1} . Z_{\lambda-1},$$

$$f_{\lambda+2} - \frac{n+\lambda+3}{(2n+2\lambda+5)x} f_{\lambda+3} = \frac{n+\lambda+2}{(2n+2\lambda+5)x} \cdot f_{\lambda+1},$$

$$a_{\lambda+1} = \frac{n+\lambda+2}{(2n+2\lambda+5)x} \cdot a'_{\lambda+1},$$

so folgt, dass die rechte Seite von (b) gleich der mit $\frac{n+\lambda+2}{(2n+2\lambda+5)x}$ multiplizierten rechten Seite von a, dass demnach

$$c_{\lambda+1} = \frac{n+\lambda+2}{(2n+2\lambda+5)x} \cdot c_\lambda$$

ist. Rechnet man nun c_1 wirklich aus, so folgt unter Fortlassung des Index

$$(19) \qquad c = \frac{n+1}{(2n+3)x} \cdot \frac{n+2}{(2n+5)x} \cdots \frac{n+\mu+1}{(2n+2\mu+3)x}.$$

Die Grösse c ist demnach gleich dem Produkt aller derjenigen Faktoren, mit welchen in dem ursprünglichen Kettenbruch ein Nenner und die beiden benachbarten Zähler multipliziert worden sind, damit sämmtliche Partialnenner den Wert 1 erhielten.

Die Kugelfunktionen zweiter Art liefern den Kettenbruch

$$\frac{\psi_1}{\psi_0} = \begin{vmatrix} a'_{\mu+1} & a_\mu & \dots & a_0 \cdot \frac{\psi_{\mu+2}}{\psi_{\mu+1}} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

mit den speziellen Werten

$$(20) \qquad \begin{array}{ll} \psi_0 = Q_{n+\mu+2}, & a'_{\mu+1} = \frac{n+\mu+2}{(2n+2\mu+3)x}, \\ \psi_1 = Q_{n+\mu+1}, & a_\mu = \frac{(n+\mu+1)^2}{(2n+2\mu+3)(2n+2\mu+1)xx}, \\ \dots\dots & \dots\dots\dots \\ \psi_{\mu+1} = Q_{n+1}, & a_1 = \frac{(n+2)^2}{(2n+5)(2n+3)xx}, \\ \psi_\mu = Q_n, & a_0 = \frac{n+1}{(2n+3)x}. \end{array}$$

Die Grösse k lässt sich auf demselben Wege wie c berechnen, und man erhält dafür das entsprechende Produkt

$$(21) \qquad k = \frac{n+\mu+2}{(2n+2\mu+3)x} \cdot \frac{n+\mu+1}{(2n+2\mu+1)x} \cdots \frac{n+2}{(2n+3)x}.$$

Daher wird

$$c \,.\, k = a_0 \,.\, a'_{\mu+1},$$

$$\frac{k}{c} = \frac{n+\mu+2}{n+1},$$

so dass der Rest die einfachere Gestalt

$$(22) \qquad R = \frac{(n+\mu+2) f_{\mu+2}(f_{\mu+1} \cdot \psi_0 - f_{\mu+2} \cdot \psi_1)}{(n+1) \cdot f_0 \quad (f_0 \quad \cdot \psi_0 - f_{\mu+2} \cdot \psi_{\mu+2})}$$

annimmt.

Es sind jetzt nur noch die Grenzwerte, denen $P_{n+\mu}$ und $Q_{n+\mu}$ mit unendlich wachsendem μ zustreben, zu bestimmen. Dies ist schon von Heine [1]) nach der Laplaceschen Methode, den Grenzwert eines Integrals mit einem unendlich wachsenden Parameter annäherungsweise zu berechnen, ausgeführt worden.

Betrachten wir zunächst die reellen Werte von x, die der Ungleichung $-1 < x < +1$ genügen und setzen zur Abkürzung

$$x = \cos\vartheta,\ 0 < \vartheta < \pi\ ^{2}),\ n+\mu+1 = \lambda,$$

$$(\lambda + \tfrac{1}{2})\,\vartheta + \frac{\pi}{4} = \alpha,\ (\lambda + \tfrac{3}{2})\,\vartheta + \frac{\pi}{4} = \alpha_1,$$

so wird mit hinreichender Genauigkeit

$$f_{\mu+1} = P_\lambda\ ^{3}) \quad = \sqrt{\frac{2}{\lambda \,.\, \pi \sin\vartheta}} \cdot (\sin\alpha + \delta_\lambda),$$

$$f_{\mu+2} = P_{\lambda+1} \quad = \sqrt{\frac{2}{(\lambda+1) \,.\, \pi \sin\vartheta}} \cdot (\sin\alpha_1 + \delta_{\lambda+1}),$$

$$\psi_0 \ = Q_{\lambda+1}\ ^{4}) = \sqrt{\frac{\pi}{2(\lambda+1)\sin\vartheta}} \cdot (\cos\alpha_1 + \varepsilon_{\lambda+1}),$$

$$\psi_1 \ = Q_\lambda \quad = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda \sin\vartheta}} \cdot (\cos\alpha + \varepsilon_\lambda).$$

---

1) Heine l. c. S. 175—182.

2) Das von Heine angegebene Interwall $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ ist in dem obigen Sinne zu erweitern.

3) Heine l. c. S. 178 Gl. 29c.

4) Heine l. c. S. 182 Gl. 29b.

In diesen Ausdrücken bedeuten δ und ε Grössen, welche mit unendlich werdendem λ unendlich klein werden. Trotzdem darf man sie jedoch nicht gegen die trigonometrischen Funktionen vernachlässigen, da man über das Verhalten dieser bei wachsendem λ wegen des Bestandteiles $\lambda\vartheta$ gar nichts weiss. Ueber den Wert des Restausdruckes

$$(24)\quad R = \frac{1}{n+1}\cdot\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}}\cdot\frac{1}{P_n}\cdot\frac{1}{\sin\vartheta}\cdot(\sin\alpha_1+\delta_{\lambda+1})\cdot\frac{(\sin\alpha+\delta_\lambda)(\cos\alpha_1+\varepsilon_{\lambda+1})-(\sin\alpha_1+\delta_{\lambda+1})(\cos\alpha+\varepsilon_\lambda)}{P_n\frac{\pi}{2}(\cos\alpha_1+\varepsilon_{\lambda+1})-Q_n(\sin\alpha_1+\delta_{\lambda+1})}$$

lässt sich daher auch nichts Bestimmtes aussagen, und es bleibt die Frage nach der Konvergenz des Kettenbruches für die betrachteten Werte von x noch eine offene.

Setzen wir nun mit Ausschluss der eben betrachteten Werke

$$\xi = x - \sqrt{x^2-1},$$

so dass also $M\xi < 1$ ist, so erhalten wir als Grenzwerte von Kugelfunktionen (l. c.)

$$P_\lambda(x) = \xi^{-\lambda}\frac{1}{\sqrt{\lambda\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

$$Q_\lambda(x) = \xi^{\lambda+1}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Da ξ^λ beliebig klein wird, so kann man den ersten Summanden im Nenner vernachlässigen und erhält nach Fortheben von $f_{\mu+2}$

$$(25)\quad R = \frac{(\lambda+1)\left(\xi^{\lambda+2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\xi^\lambda\sqrt{\frac{1}{\lambda\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot-\xi^{\lambda+1}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\xi^{-\lambda-1}\frac{1}{\sqrt{(\lambda+1)\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}{-(n+1)f_0\cdot\psi_{\mu+2}}$$

$$= \frac{(\lambda+1)\cdot\sqrt{\frac{1}{\lambda(\lambda+1)}}(1-\xi^2)^{-1}(1-\xi^2)}{(n+1)\cdot f_0\cdot\psi_{\mu+2}} = \frac{\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}{(n+1)\cdot f_0\cdot\psi_{\mu+2}}.$$

Der Rest konvergiert mithin mit wachsendem μ gegen die feste Grenze

$$\frac{1}{(n+1).f_0.\psi_{\mu+2}}.$$

Für die Kettenbruchentwickelung der Kugelfunktionen zweiter Art erhält man auf demselben Wege die Formel

$$R=\frac{kf_{\mu+2}(\psi_0.f_{\mu+1}-\psi_1 \quad f_{\mu+2})}{cf_0 \quad (\psi_0 f_0 \quad -\psi_{\mu+2}f_{\mu+2})},$$

wenn die Grössen f und ψ jetzt folgende Bedeutung haben,

(27)

$f_0 = Q_n,$	$\psi_0 = P_{n+\mu+2},$
$f_1 = Q_{n+1},$	$\psi_1 = P_{n+\mu+1},$
. . . .	. . . .
$f_{\mu+1} = Q_{n+\mu+1},$	$\psi_{\mu+1} = P_{n+1},$
$f_{\mu+2} = Q_{n+\mu+2}.$	$\psi_\mu = P_n.$

Es möge gestattet sein, hier die Bemerkung einzuschalten, dass beide Arten von Kugelfunktionen, derselben Rekursionsformel genügend, auch zu demselben Kettenbruch führen müssen, dass also der Kettenbruch selbst nur einen der beiden Quotienten darstellen kann.

Um den Rest für die reellen Werte $-1<x<+1$ zu erhalten, haben wir in Gl. 24 nur cos mit sin und $\frac{2}{\pi}$ mit $\frac{\pi}{2}$ zu vertauschen. Der Rest bleibt demnach auch hier unbestimmt, die Konvergenz ganz unentschieden.

Setzen wir dagegen mit Ausschluss der genannten Werte wieder

$$\xi=x-\sqrt{x^2-1},$$

so wird, da jetzt der zweite Summand im Nenner vernachlässigt werden kann,

(28)
$$R=\frac{\pi.\xi^{2\lambda+3}.\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}{(n+1)f_0 f_0},$$

mithin verschwindend klein, so dass also die Kettenbruchentwickelung der Kugelfunktionen zweiter Art für die betrachteten Werte von x gegen den erzeugenden Quotienten konvergiert.

Durch Zusammenfassen dieser Resultate gewinnt man für alle Werte von x, die reellen zwischen den Grenzen $+1$ und -1 ausgenommen, die Beziehung

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} - \frac{Q_{n+1}}{Q_n} = \frac{1}{(n+1).P_n.Q_n}. \tag{29}$$

VII.

Der Kettenbruchentwickelung der Cylinderfunktionen ist eine ähnliche Bemerkung wie bei den Kugelfunktionen voranzuschicken. Beide Arten genügen derselben Rekursionsformel und liefern daher denselben Kettenbruch. Dieser kann daher nur einen der beiden Quotienten darstellen.

Das Verhältnis $J_{n+1}:J_n$ ist schon von Bessel[1]) (l. c.) und von Herrn Lommel[2]) in einen Kettenbruch verwandelt worden, und zwar giebt letzterer ihm die folgende Form

$$\frac{J_{n+1}}{J_n} = \left| \begin{matrix} z & z^2 & \dots & z^2 \\ 2(n+1) & 2(n+2) & \dots & 2(n+\mu) - z \cdot \frac{J_{n+\mu+1}}{J_{n+\mu}} \end{matrix} \right|.$$

Die Konvergenz desselben begründet er auf folgende Weise: „Da der Quotient $J_{n+\mu+1}:J_{n+\mu}$ bei wachsendem Index offenbar verschwindet, so darf in vorstehendem Kettenbruch das Restglied $z\ J_{n+\mu+1}:J_{n+\mu}$ weggelassen und derselbe ins Unendliche fortgesetzt werden“. Die Begründung ist stichhaltig. Trotzdem scheint es nicht ohne Interesse zu sein, den Rest wirklich aufzustellen und zu berechnen.

Aus der Rekursionsformel

$$xJ_n - 2(n+1)J_{n+1} + xJ_{n+2} = 0$$

folgt nach geeigneter Division der Kettenbruch

$$\frac{f_1}{f_0} = \left| \begin{matrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{\mu+1} \cdot \frac{f_{\mu+2}}{f_{\mu+1}} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{matrix} \right|$$

---

1) Lommel, Studien über die Bessel'schen Funktionen S. 5.
2) Bessel l. c. S. 31—32.

mit den speziellen Werten

$$
\begin{array}{l|l}
f_0 = J_n, & a_0 = \dfrac{x}{2(n+1)}, \\
f_1 = J_{n+1}, & a_1 = \dfrac{x^2}{2(n+1).2(n+2)}, \\
\quad\ldots\ldots & \quad\ldots\ldots\ldots \\
f_{\mu+1} = J_{n+\mu+1}, & a_\mu = \dfrac{x^2}{2(n+\mu)\,2(n+\mu+1)}, \\
f_{\mu+2} = J_{n+\mu+2}. & a'_{\mu+1} = \dfrac{x}{2(n+\mu+1)}.
\end{array}
\tag{18}
$$

Die Grösse c, welche sich genau so wie oben berechnen lässt, nimmt hier den Wert an

$$
c = \frac{x}{2(n+1)} \cdot \frac{x}{2(n+2)} \cdots \frac{x}{2(n+\mu+1)}. \tag{19}
$$

Die Cylinderfunktionen zweiter Art liefern den Kettenbruch

$$
\frac{\psi_1}{\psi_0} = \left| \begin{array}{cccc} a'_{\mu+1} & a_\mu & \ldots & a_0 \cdot \dfrac{\psi_{\mu+2}}{\psi_{\mu+1}} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{array} \right|
$$

mit den Werten

$$
\begin{array}{l|l}
\psi_0 = Y_{n+\mu+2} & a'_{\mu+1} = \dfrac{x}{2(n+\mu+1)} \\
\psi_1 = Y_{\mu+n+1} & a_\mu = \dfrac{x^2}{2(n+\mu+1).2(n+\mu)} \\
\quad\ldots\ldots & \quad\ldots\ldots\ldots \\
\psi_{\mu+1} = Y_{n+1} & a_1 = \dfrac{x^2}{2(n+2)2(n+1)} \\
\psi_{\mu+2} = Y_n & a_0 = \dfrac{x}{2(n+1)}.
\end{array}
\tag{20}
$$

Hier wird

$$
k = \frac{x}{2(n+\mu+1)} \cdot \frac{x}{2(n+\mu)} \cdots \frac{x}{2(n+1)}, \tag{21}
$$

mithin

$$
\begin{aligned}
ck &= a_0 . a_1 \ldots a'_{\mu+1} \\
c &= k
\end{aligned}
$$

und

$$R = \frac{f_{\mu+2}(f_{\mu+1}\cdot\psi_0 - f_{\mu+2}\cdot\psi_1)}{f_0(f_0\psi_0 - f_{\mu+2}\cdot\psi_{\mu+2})}. \tag{22}$$

Es erübrigt also nur noch, die Werte der Cylinderfunktionen für unendlich grossen Index zu berechnen. Es soll dies im folgenden für ein reelles und ein rein imaginäres Argument ausgeführt werden. Der allgemeine Fall eines komplexen Argumentes muss späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

In der Gleichung

$$J_n(x) = \frac{x_n}{2^n \Pi n}\cdot\left\{1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2).(2n+4)} - \cdots\right\}$$

sind alle Glieder der Klammer mit Ausnahme des ersten für unendlich grosses n unendlich klein und besitzen sämtlich abwechselnde Vorzeichen. Da ferner jedes Glied grösser als folgende ist, so erhält man zunächst für ein reelles positives x die Ungleichungen

$$\frac{x^n}{2^n.\Pi n} > J_n > \frac{x^n}{2^n \Pi n}\left(1 - \frac{x^2}{2(2n+2)}\right).$$

Es wird demnach

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n.\Pi n}\cdot c_n,\ c_n = 1-\varepsilon,\ \lim \varepsilon = 0 \text{ für } n = \infty.$$

Da ferner $J_n(x) = (-1)^n J_n(+x)$ ist, so gilt die Gleichung

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n.\Pi n}\cdot c_n,\ c_n = 1-\varepsilon,\ \lim \varepsilon = 0 \text{ für } n=\infty \tag{23}$$

für positives und negatives reelles x.

Für ein rein imaginäres Argument $i.x$ wird ferner

$$J_n(ix) = \frac{(ix)^n}{2^n.\Pi n}\left\{1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4.(2n+2)(2n+4)} + \cdots\right\}$$

oder

$$(-i)^n.J_n(ix) = \frac{x^n}{2^n \Pi n}\left\{1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4.(2n+2)(2n+4)} + \cdots\right\}.$$

Für positives x ist dann

$$(-i)^n.J_n(ix) > \frac{x^n}{2^n.\Pi n},$$

und

$$(-i)^n . J_n(ix) < \frac{x^n}{2n.1\,3\ldots n} \cdot \left\{1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \left(\frac{x^2}{2(2n+2)}\right)^2 + \ldots\right\}$$

$$< \frac{x^n}{2^n.1\,3\ldots n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2 \cdot 2n+2}} \ldots$$

Daher wird für positives x

$$(-i)^n . J_n(ix) = \frac{x^n}{2^n.1\,3\ldots n} \cdot c'_n, \; c'_n = 1+\varepsilon, \; \lim \varepsilon = 0 \text{ für } n = \infty.$$

Da auch hier

$$J_n(-ix) = (-1)^n . J_n(+ix)$$

ist, so gilt für positives und negatives x

$$(-i)^n . J_n(ix) = \frac{x^n}{2_n.1\,3\ldots n} c'_n, \; c'_n = 1+\varepsilon, \; \lim \varepsilon = 0 \text{ für } n = \infty,$$

daher schliesslich auch

$$J_n(ix) = \frac{(ix)^n}{2^n.1\,3\ldots n} c'_n. \tag{23a}$$

Damit ist für reelles und rein imaginäres x das Resultat gewonnen:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n.1\,3\ldots n} \cdot c_n, \; c_n = 1 \lim n = \infty. \tag{23b}$$

Zur Berechnung der Cylinderfunktionen zweiter Art für unendlich werdenden Index gehen wir aus von der oben angegebenen Heine'schen Gleichung

$$Y_n = \frac{x^n}{2^n.1\,3\ldots(n-\frac{1}{2})} \cdot \int_0^{\vartheta+(\alpha+\chi)i} e^{xi\cos\varphi i} \sin^{2n}\varphi i d\varphi.$$

Zunächst suchen wir den Fall eines reellen positiven x zu erledigen. Dazu benutzen wir den Umstand, dass nach der Definition Y_n im Querschnitt gleich dem arithmetischen Mittel aus den Werten am Uferrand ist, und erhalten, wenn wir das Integral ohne den Faktor mit S_1 bezeichnen[1])

$$S_1 = \int_0^{\infty} e^{ix\sin iq} \cos^{2n} iq\, dq - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta\cos\varphi) \sin^{2n}\varphi d\varphi.$$

Nun wird das zweite Integral unendlich klein während das erste, wie sich zeigen wird, unendlich gross wird. Unter

1) Heine l. c. S. 235.

Vernachlässigung des zweiten Integrals erhalten wir daher

$$S_1 = \int_0^\infty e^{ix \sin i\varphi} \cos^{2n} i\varphi d\varphi,$$

$$= \int_0^\infty e^{-x\frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2}} \cdot \left(\frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2}\right)^{2n} d\varphi.$$

Es ist leicht, S_1 in Grenzen einzuschliessen. Durch die Substitution

$$\frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2} = z$$

wird, wenn wir den positiv reellen Wert von x mit ξ bezeichnen,

$$S_1 = \int_0^\infty e^{-\xi z}(z^2+1)^{\frac{2n-1}{2}} dz.$$

Nun ist einerseits

$$S_1 < \int_0^\infty e^{-\xi z}(z+1)^{2n-1} dz$$

$$< e^\xi \int_0^\infty e^{-\xi(z+1)}(z+1)^{2n-1} dz$$

$$< e^\xi \int_1^\infty e^{-\xi z'} z'^{2n-1} dz'$$

$$< e^\xi \int_0^\infty e^{-\xi z'} z'^{2n-1} dz'$$

$$< e^\xi \cdot \frac{\Pi(2n-1)}{\xi^{2n}};$$

andererseits

$$S_1 > \int_0^\infty e^{-\xi z} \cdot z^{2n-1} dz$$

$$> \frac{\Pi(2n-1)}{\xi^{2n}}.$$

Bezeichnet daher c_1 einen zwischen e^ξ und 1 liegenden Wert, so wird

$$S_1 = c_1 \frac{\Pi(2n-1)}{\xi^{2n}},$$

mithin

$$Y_n(\xi) = \frac{\xi^n}{2^n \Pi(n-\frac{1}{2})} \cdot \frac{\Pi(2n-1)}{\xi^{2n}} \cdot c_1. \tag{24}$$

Da ferner nach der Definition

$$S_1(-\xi) = S_1(\xi)$$

sein soll, so ergiebt sich sofort

$$Y_n(-\xi) = \frac{(-\xi)^n}{2^n \Pi(n-\frac{1}{2})} \cdot \frac{\Pi(2n-1)}{(-\xi)^{2n}} \cdot c_1.$$

Dadurch ist die für jedes reelle x geltende Gleichung

$$Y_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Pi(n-\frac{1}{2})} \cdot \frac{\Pi(2n-1)}{x^{2n}} \cdot c_1 \tag{24a}$$

gewonnen.

Für den Fall eines positiv imaginären Argumentes

$$x = i\eta$$

ist das Integral

$$Y_n(i\eta) = \frac{(i\eta)^n}{2^n . \Pi(n-\frac{1}{2})} \cdot \int_1^\infty e^{-\eta \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2}} \cdot \left(\frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2}\right)^{2n} d\varphi . i^{2n}.$$

Bezeichnen wir dieses Integral allein mit S_2, so wird durch die Substitution

$$\frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2} = z$$

$$S_2 = \int_0^\infty e^{-\eta z} (z^2-1)^{\frac{2n-1}{2}} dz.$$

Auch hierfür finden sich leicht Grenzen. Es ist nämlich einerseits

$$S_2 < \int_1^\infty e^{-\eta z} z^{2n-1} dz,$$

$$< \int_0^\infty e^{-\eta z} z^{2n-1} dz,$$

$$< \frac{\Pi(2n-1)}{\eta^{2n}},$$

andererseits

$$S_2 > \int_1^\infty e^{-\eta z}(z-1)^{2n-1}dz$$

$$> e^{-\eta}\int_1^\infty e^{-\eta(z-1)}(z-1)^{2n-1}dz$$

$$> e^{-\eta}\int_0^\infty e^{-\eta z'}z'^{2n-1}dz'$$

$$> e^{-\eta}\cdot\frac{\Pi(2n-1)}{\eta^{2n}}.$$

Bezeichnet jetzt c_2 einen zwischen 1 und $e^{-\eta}$ liegenden Wert, so wird

$$Y_n(i\eta) = \frac{(i\eta)^n}{2^n.\Pi(n-\frac{1}{2})}\cdot i^{2n}\cdot\frac{\Pi(2n-1)}{\eta^{2n}}c_2$$

$$= \frac{(i.\eta)^n}{2^n.\Pi(n-\frac{1}{2})}\cdot(-1)^{2n}\cdot\frac{\Pi(2n-1)}{(i\eta)^{2n}}c_2$$

$$= \frac{(i.\eta)^n}{2^n.\Pi(n-\frac{1}{2})}\cdot\frac{\Pi(2n-1)}{(i\eta)^{2n}}c_2.$$

Der Fall eines negativen η erledigt sich wieder infolge der Definition durch die Gleichung

$$S_2(-i\eta) = S_2(i\eta).$$

Daher ist

$$Y_n(-i\eta) = \frac{(-i\eta)^n}{2^n\Pi(n-\frac{1}{2})}\cdot\frac{\Pi(2n-1)}{(-i\eta)^{2n}}\cdot c_2.$$

Die Formel

$$Y_n(i\eta) = \frac{(i\eta)^n}{2^n\Pi(n-\frac{1}{2})}\cdot\frac{\Pi(2n-1)}{(i\eta)^{2n}}c_2 \tag{24b}$$

gilt daher sowohl für positives als auch für negatives η. Diese beiden Resultate legen die Vermutung nahe, dass

$$Y_n(\xi+i\eta) = \frac{(\xi+i\eta)^n}{2^n\Pi(n-\frac{1}{2})}\cdot\frac{\Pi(2n-1)}{(\xi+i\eta)^{2n}}c_3$$

sein wird. Der Nachweis dieser Formel muss jedoch einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

Führen wir nun die so gefundenen Werte in den obigen Restausdruck ein, so erhalten wir nach Vernachlässigung von $f_{\mu+2}.\psi_{\mu+2}$ gegen $f_0\psi_0$ im Nenner und geeigneter Division

$$R=\frac{f_{\mu+2}\cdot f_{\mu+1}}{f_0\cdot f_0}\left(1-\frac{f_{\mu+2}}{f_{\mu+1}}\cdot\frac{\psi_1}{\psi_0}\right)$$

$$(25)\qquad =\frac{x^{n+\mu+2}\cdot x^{n+\mu+1}}{f_0\cdot f_0\cdot 2^{n+\mu+2}\cdot\Pi(n+\mu+2)2^{n+\mu+1}\cdot\Pi(n+\mu+1)}\cdot\left(1-\frac{x\cdot x}{2(n+\mu+2)\cdot 2(n+\mu+1)}\cdot c\right)$$

also einen stets verschwindenden Ausdruck. Damit ist für reelle und für rein imaginäre Werte von x erwiesen, dass die Kettenbruchentwickelung der Cylinderfunktionen erster Art gegen den erzeugenden Quotienten konvergiert.

Für den bei der Kettenbruchentwickelung der Cylinderfunktionen zweiter Art auftretenden Rest erhalten wir auf demselben Wege

$$R=\frac{f_{\mu+2}(f_{\mu+1}\cdot\psi_0-f_{\mu+2}\cdot\psi_1)}{f_0\quad(f_0\qquad\psi_0-f_{\mu+2}\cdot\psi_{\mu+2})}$$

worin aber jetzt die Grössen f und ψ die folgende Bedeutung haben:

$f_0 = Y_n,$	$\psi_0 = J_{n+\mu+2},$
$f_1 = Y_{n+1},$	$\psi_1 = J_{n+\mu+1},$
. . . .	. . . .
$f_{\mu+1} = Y_{n+\mu+1},$	$\psi_{\mu+1} = J_{n+1},$
$f_{\mu+2} = Y_{n+\mu+2}.$	$\psi_{\mu+2} = J_n.$

Nun lässt sich $f_0\psi_0$ gegen $f_{\mu+2}\,\psi_{\mu+2}$, $f_{\mu+1}\cdot\psi_0$ gegen $f_{\mu+2}\cdot\psi_1$ vernachlässigen; $f_{\mu+2}$ hebt sich fort, und es bleibt der einfache Ausdruck

$$(26)\qquad R=\frac{\psi_1 f_{\mu+2}}{f_0\cdot\psi_{\mu+2}}=\frac{c}{Y_n\cdot J_n\cdot x\sqrt{\pi}},$$

der offenbar nicht verschwindet.

Für die betrachteten Werte von x folgt daraus noch die Beziehung

$$(27)\qquad \frac{J_{n+1}}{J_n}-\frac{Y_{n+1}}{Y_n}=-\frac{c}{J_n\cdot Y_n\cdot x\sqrt{\pi}}.$$

Lebenslauf.

Geboren wurde ich Friedrich Rudolf Banning, evangelischer Konfession, am 5. Februar 1865 zu Burgsteinfurt i. W. als Sohn des verstorbenen Gymnasialoberlehrers Dr. Banning. Von Ostern 1874 an besuchte ich das Gymnasium zu Minden, welches ich Ostern 1883 mit dem Zeugnis der Reife verliess. Nachdem ich dann das praktische Vorbereitungsjahr für den Forstverwaltungsdienst durchgemacht hatte, widmete ich mich von Ostern 1884 bis Herbst 1889 an den Universitäten Tübingen, Berlin und Bonn dem Studium der Mathematik und der Naturwissenschaften und zwar in Bonn 7 Semester. Hier hörte ich Vorlesungen bei den Herren Professoren:

Clausius †, Hertz †, Kekulé, Ketteler, Kortum, von Lasaulx †, Laspeyres, von Lilienthal, Lipschitz, Ludwig, Minkowski, Neuhäuser, vom Rath †, Rein, Strasburger.

Allen genannten Herren, besonders aber Herrn Geh. Reg.-Rat Professor Dr. Lipschitz, von welchem ich die Anregung zu vorliegender Arbeit erhielt, sowie Herrn Professor Dr. Kortum spreche ich an dieser Stelle meinen wärmsten Dank aus.

Nachdem ich am 15. Februar 1890 das Examen pro facultate docendi in Bonn abgelegt hatte, erhielt ich meine pädagogische Ausbildung am Realgymnasium zu Iserlohn und am Gymnasium zu Burgsteinfurt, unterrichtete ein Semester am Gymnasium zu Hamm und bin seit Oktober 1892 ordentlicher wissenschaftlicher Lehrer an der Gelehrtenschule des Johanneums zu Hamburg.

Thesen.

1. Bestimmt man die Einheiten i und j aus der Gleichung

$$x^2+y^2+z^2=(x+iy+jz)(x-iy-jz),$$

und bedeuten ω_1, ω_2, ω_3 irgend welche reelle Grössen, so giebt es Funktionen, die den Gleichungen

$$f(x+\omega_1)=f(x),$$
$$f(x+i\omega_2)=f(x),$$
$$f(x+j\omega_3)=f(x)$$

genügen.

2. Der experimentelle Nachweis einer vermittelten Fernwirkung der elektrischen Kraft kann nicht ohne Einfluss auf unsere Ansicht von der Natur der Schwerkraft bleiben.

3. Die richtig angewandte Analogie ist ein äusserst fruchtbares Prinzip der mathematischen Forschung.

4. Eine Erweiterung des Lehrpensums in der Mathematik an den höheren Lehranstalten erscheint nicht erstrebenswert.

5. Klassische Bildung und Schulung ist auch ohne das Studium der klassischen Sprachen möglich.